Для числа сателлитов больше трех параметр t_2 может изменяться в пределах $0{,}8 < t_2 < 1{,}2$, так как $\frac{1}{\sin(\pi/4)} > 1{,}2$. Рассмотрим второе уравнение системы (8): $(Z_4 + Z_3)\sin(\pi/4) \geq Z_3 + 2$. Подставляя выражения для чисел зубьев Z_4 и Z_3 (3)-(5), получим:

$$\left(Z_1\left(i_{1H}^4 - 1\right) + \frac{yt_2\left(i_{1H}^4 - 1\right) - y}{1 + t_1(1+y) - yt_2} Z_1\right)\sin\frac{\pi}{k} \geq \frac{yt_2\left(i_{1H}^4 - 1\right) - y}{1 + t_1(1+y) - yt_2} Z_1 + 2 \cdot$$

Используя аналогичные предположения, что и для первого уравнения, получим: $\left(\left(i_{1H}^4 - 1\right)\left(1 + t_1(1+y) - yt_2\right) + yt_2\left(i_{1H}^4 - 1\right) - y\right)\sin\frac{\pi}{k} > yt_2\left(i_{1H}^4 - 1\right) - y$ или $\left(i_{1H}^4(1 + t_1 + y) - y\right)\sin(\pi/4) > yt_2 i_{1H}^4 - yt_2 - y$.

Выражая передаточное отношение i_{1H}^4, получим:

$$i_{1H}^4 > \frac{y\sin(\pi/4) - y(t_2 + 1)}{(1 + t_1 + y)\sin(\pi/4) - yt_2}. \qquad (11)$$

Рассматривая полученное выражение (11) совместно с условием (7), получим:

$$\begin{cases} i_{1H}^4 > \dfrac{y\sin(\pi/4) - y(t_2 + 1)}{(1 + t_1 + y)\sin(\pi/4) - yt_2}; \\ i_{1H}^4 > \dfrac{1 + t_2}{t_2}. \end{cases} \qquad (12)$$

Общие выводы

1. Показана возможность синтеза планетарных механизмов с учетом корректировки углов зацепления не только с односвязными колесами [3], но и для механизмов с двусвязными колесами на примере механизма $2A - \overline{AA}$.

2. Получены генеральные уравнения для синтеза планетарного механизма $2A - \overline{AA}$ с учетом корректировки углов зацепления для пар связанных и несвязанных зубчатых колес на этапе синтеза механизма.

3. Получены условия для определения пределов возможных передаточных отношений проектируемого механизма для каждого сочетания параметров t_1 и t_2.

4. Синтез планетарного механизма $2A - \overline{AA}$, проведенный с использованием генеральных уравнений (3), (4) и (5), дает возможность получить дополнительные комбинации чисел зубьев, которые нельзя получить с помощью генеральных уравнений, приведенных в [1].

Список литературы: **1.** *Ткаченко В.А.* Планетарные механизмы (оптимальное проектирование). – Харьков: Издательский центр ХАИ. – 2003. – 446 с. **2.** *Кавецкий С.Н., Гереш Т.В.* Зависимость углов зацепления зубчатых пар планетарных механизмов со связанными и несвязанными колесами. // Вестник НТУ „ХПИ”. Тем. вып.: Машиностроение и САПР. – № 2. – 2008. – С.115-120. **3.** *Кавецкий С.Н., Гереш Т.В.* Синтез планетарных механизмов AA и II со связанными и не связанными колесами с учетом углов зацепления. // Вестник НТУ „ХПИ”. Тем. вып.: Машиностроение и САПР. – № 9. – 2008. – С.98-103.

Поступила в редколлегию 19.03.2009

УДК 519.8

Вісс. Гр. КЛИМЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, НТУ “ХПІ”

2.

3. БУЛЬОВІ АЛГЕБРИ НА БАЗІ НЕПЕРЕРВНИХ І 4. НЕПЕРЕРВНО-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

В даній роботі на множинах неперервних і неперервно-диференційовних функцій встановлюється відношення еквівалентності, яке розбиває ці множини на класи еквівалентності H_0, H_m. В доповнення до алгебро-логічних побудов, започаткованих раніше, показано, як на множинах класів еквівалентності H_0, H_m можна побудувати бульові алгебри, ізоморфні бульовій алгебрі множин простору R^n.

In this work the relation of equivalence is determineв on sets of continuous and continuously differentiable functions, which breaks up these sets on the classes of equivalence H_0, H_m. In addition to algebro-logical constructions, founded before, it is shown, how on the sets of classes of equivalence of H_0, H_m can be built Boolean algebra isomorphic Boolean algebra of sets of R^n space.

Нехай $f(M) \in C\left(R^n\right)$, де $C\left(R^n\right)$ – множина всіх неперервних на R^n функцій. Означимо для неї супровідну їй характеристику – характеристичну функцію таким чином:

$$X(f(M)) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(1 + \text{Signum}(f(M))\right) = \begin{cases} 1, f(M) \geq 0, \\ 0, f(M) < 0 \end{cases}: \quad R^n \to \{0, 1\},$$

або ж і так:

$$X(f(M)) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & M \in L(f(M), 0) \\ 0, & M \in \overline{L(f(M), 0)} \end{cases}: \quad R^n \to \{0, 1\},$$

де $L(f(M), 0) = \left\{M \in R^n \mid f(M) \geq 0\right\}$.

Неважко збагнути, що $X(f(M))$є двійкова змінна величина, яка є суперпозицією функції Хевісайда і функції $f(M)$. Заради простоти цю функцію будемо також позначати і таким символом – $X_f(M)$.

Очевидно, що $X_f(M)$ є характеристична функція лебегової множини $L(f(M), 0)$. Визначимось також із характеристикою для протилежної функції до $f(M)$:

$$X(-f(M)) = \frac{1}{2}\left(1 - \text{Signum}(f(M))\right) = \begin{cases} 0, f(M) \geq 0, \\ 1, f(M) < 0 \end{cases} \Rightarrow X(-f(M)) = \overline{X_f(M)}.$$

Зрозуміло також, що в разі $f(M) \ge 0$ для $\forall M \in R^n$, то $X_f(M) \equiv 1$; в разі ж $f(M) < 0$ для $\forall M \in R^n$, то $X_f(M) \equiv 0$.

Отже «1» – характеристика додатно визначених функцій на R^n, а «0» характеризує від'ємні функції. Спираючись на означену характеристику функцій множини $C(R^n)$, введемо на ній відношення еквівалентності і класи еквівалентності. Нехай f(M) і g(M) – довільні функції множини $C(R^n)$.

Означення1. *Функції* f(M) *і* g(M) *назвемо еквівалентними, позначаємо* f(M)~g(M), *якщо* $X_f(M) = X_g(M)$.

Означення2. *Підмножину функцій із* $C(R^n)$, *елементи якої є еквівалентними заданій функції* $f(M)$, *назвемо класом еквівалентності функції* $f(M) \in C(R^n)$. *Позначаємо цю підмножину символом –* $[f(M)]$; *функцію* $f(M)$ *будемо називати її представником.*

Отже, $g(M) \in [f(M)] \Leftrightarrow X_g(M) = X_f(M)$, тобто кожний елемент множини $[f(M)]$ є її представником. Позначаємо також $X([f(M)]) \overset{def}{=} X_f(M)$.

Зважаючи на те, що додатно визначені функції належать одному класу еквівалентності і R_+ міститься в цьому класі, то будемо цей клас позначати символом $[1]$; $X([1]) \equiv 1$. Клас еквівалентності, який містить від'ємні функції, позначаємо через $[-1]$; $X([-1]) \equiv 0$. Введемо позначення для доповнення класу $[f(M)]$: $\overline{[f(M)]} \overset{def}{=} [-f(M)]$, $\overline{X([f(M)])} \overset{def}{=} X(\overline{[f(M)]})$.

Маємо наступне очевидне твердження.

<u>Теорема 1.</u> *Якщо* $X([f(M)]) \neq X([g(M)])$, *то* $[f(M)] \cap [g(M)] = \varnothing$;

$$[f(M)] = [g(M)] \Leftrightarrow X([f(M)]) = X([g(M)]).$$

Із попереднього випливає наявність наступних однозначних відповідностей:

$$\begin{aligned} &[f(M)] \to X([f(M)]) \to L(f(M),0), \\ &\overline{[f(M)]} \to \overline{X([f(M)])} \to \overline{L(f(M),0)}, \\ &[1] \quad \to \quad 1 \quad \to \quad R^n, \\ &[-1] \quad \to \quad 0 \quad \to \quad \varnothing. \end{aligned} \qquad (1)$$

Знайдемо характеристики для функцій:

$$\max(M) = f(M) + g(M) + |f(M) - g(M)|,$$
$$\min(M) = f(M) + g(M) - |f(M) - g(M)|.$$

Зрозуміло, що функція $\max(M) < 0$ лише в разі, коли $f(M) < 0$ і $g(M) < 0$; а функція $\min(M) > 0$ лише в разі, коли $f(M) > 0$ і $g(M) > 0$. Отже, значення двійкових змінних $X_{max}(M)$ і $X_{min}(M)$ легко визначаємо через значення характеристик $X_f(M)$ і $X_g(M)$ із наведеної нижче табл. 1.

Таблиця 1

$X_f(M)$	$X_g(M)$	$X_{max}(M)$	$X_{min}(M)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Таким чином,

$X_{max}(M) = X_f(M) \vee X_g(M)$ є диз'юнкція,

а $X_{min}(M) = X_f(M) \wedge X_g(M)$ є кон'юнкція

двійкових змінних $X_f(M)$ і $X_g(M)$. Позначаємо через H_0 множину всіх класів еквівалентності функцій із $C(R^n)$. Введемо операції над елементами цієї множини, які узгоджуються з логічними операціями над характеристиками представників цих елементів. Нехай $[f(M)], [g(M)], [h(M)] \in H_0$.

Означення 3. *Диз'юнкцією елементів* $[f(M)]$ *і* $[g(M)]$, *позначаємо* $[f(M)] \vee [g(M)]$, *будемо називати клас еквівалентності* $[\max(M)]$. Отже,

$$h(M) \in [f(M)] \vee [g(M)] \Leftrightarrow X([h(M)]) = X([f(M)]) \vee X([g(M)]) = X_{max}(M).$$

Означення 4. *Кон'юнкцією елементів* $[f(M)]$ *і* $[g(M)]$, *позначаємо* $[f(M)] \wedge [g(M)]$, *будемо називати клас еквівалентності* $[\min(M)]$;

$$[f(M)] \wedge [g(M)] \overset{def}{=} [f(M) + g(M) - |f(M) - g(M)|].$$

Неважко переконатися, що так введені операції «∨», «∧» над елементами множини H_0 мають властивості, наведені в табл. 2.

Доведемо, наприклад, властивість 3 (*закон поглинання*). Для цього необхідно переконатися, що $X(([f] \vee [g]) \wedge [g]) = (X_f \vee X_g) \wedge X_g \equiv X_g$. Скористаємося для цього табл. 3. Наведені в табл. 2 властивості означають, що множина H_0 з двома бінарними операціями «∨» і «∧» та однією унарною операцією – «доповненням», є бульова алгебра. Позначимо її символом $(H_0,\vee,\wedge)$. Зрозуміло, що однозначні відповідності (1) здійснюють гомоморфізм бульової алгебри $(H_0,\vee,\wedge)$ в бульову алгебру всіх замкнених і відкритих підмножин простору R^n, позначаємо її – $(\Sigma^n,\cup,\cap)$.

Таблиця 2

1. $[f]\vee[g]=[g]\vee[f]$	1*. $[f]\wedge[g]=[g]\wedge[f]$
2. $[f]\vee([g]\vee[h])=([f]\vee[g])\vee[h]$	2*. $[f]\wedge([g]\wedge[h])=([f]\wedge[g])\wedge[h]$
3. $([f]\vee[g])\wedge[g]=[g]$	3*. $([f]\wedge[g])\vee[g]=[g]$
4. $[f]\vee([g]\wedge[h])=$ $([f]\vee[g])\wedge([f]\vee[h])$	4*. $[f]\wedge([g]\vee[h])=$ $([f]\wedge[g])\vee([f]\wedge[h])$
5. $([f]\vee\overline{[f]})\wedge[g]=[g]$	5*. $([f]\wedge\overline{[f]})\vee[g]=[g]$
6. $[f]\wedge[g]=[f]\Leftrightarrow[f]\vee[g]=[g]$	
7. $[f]\wedge[1]=[f]$	7*. $[f]\vee[-1]=[f]$
8. $\overline{[f]\vee[g]}=\overline{[f]}\wedge\overline{[g]}$	8*. $\overline{[f]\wedge[g]}=\overline{[f]}\vee\overline{[g]}$

Згідно теореми Уітні (див. [5]), яка говорить, що «*для будь-якої замкненої підмножини* $L\subset R^n$ *існує така неперервно-диференційована, будь-якого порядку, функція* $f(M)$ *на* R^n, *що* $f(M)=0$ *при* $M\in L$ *і* $f(M)<0$ *при* $M\notin L$», маємо і зворотну до (1) однозначну відповідність. Із взаємно однозначного гомоморфізму бульових алгебр $(H_0,\vee,\wedge)$ і $(\Sigma^n,\cup,\cap)$, і випливає правильність наступного твердження.

Таблиця 3

X_f	X_g	$X_f\vee X_g$	$(X_f\vee X_g)\wedge X_g$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

<u>Теорема 2.</u> *Бульова алгебра* $(H_0,\vee,\wedge)$ *ізоморфна бульовій алгебрі* $(\Sigma^n,\cup,\cap)$.

Зауваження. Нехай $f(M)$ і $g(M)$ є довільні функції множини $C^m(R^n)$ – множини m раз неперервно-диференційованих функцій. Зважаючи на те, що функції

$$\delta(M)=\left(f(M)+g(M)+\sqrt{f(M)^2+g(M)^2}\right)\left(f(M)^2+g(M)^2\right)^{m/2},$$

$$\kappa(M)=\left(f(M)+g(M)-\sqrt{f(M)^2+g(M)^2}\right)\left(f(M)^2+g(M)^2\right)^{m/2}$$

належать $C^m(R^n)$ і є представниками, відповідно, класів $[\max(M)]$ і $[\min(M)]$, то, очевидно, що на базі множин $C^m(R^n)$ можна будувати підалгебри бульової алгебри $(H_0,\vee,\wedge)$, які будуть *ізоморфні бульовій алгебрі* $(\Sigma^n,\cup,\cap)$. Позначаємо їх, відповідно, через $(H_m,\vee,\wedge)$. Зрозуміло, що $(H_0,\vee,\wedge)\supset(H_1,\vee,\wedge)\supset\mathbf{K}\supset(H_m,\vee,\wedge)\supset\mathbf{K}$. Зазначимо також, що функції, побудовані за допомогою бінарних операцій «∨» і «∧», відомі під назвою R-функції [2, 4], знайшли широке застосування в різних напрямках прикладної математики [1-4].

Висновок. Встановлений ізоморфізм бульових алгебр дає теоретичне підгрунтя для застосування методів дискретної математики для аналізу і побудови R-функцій, широке використання яких в інженерних розрахунках і проектуванні є доконаним фактом.

Список літератури: 1. *Клименко Вісс.Гр.* Багатокритеріальні формалізації. – Харків: СПДФО Яковлєва Г.Г., 2004. – 308 с. **2.** *Клименко В.Г., Рвачев В.Л.* Об одном методе решения второй основной задачи для областей сложной формы // Прикладная механика. – Т. IV. – Вып. 1. –1968. – С. 25-32. **3.** *Рвачов В.Л.* Про алгоритмічну повноту засобів аналітичної геометрії. // Доповіді АН УРСР. – №1. – 1966. **4.** *Рвачев В.Л.* Геометрические приложения алгебры логики. – К.: Техніка, 1967. - 212 с. **5.** *Постников М. М.* Гладкие многообразия. – М.: Наука, 1987. – 480 с.

Поступила в редколегію 27.04.09

УДК 519.8

Вісс. Гр. КЛИМЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, НТУ "ХПІ"

5.

6. ЗМІШАНА БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ЗАДАЧА
7. МІНІМІЗАЦІЇ ПО МАКСИМУМУ

В даній роботі представлена формалізована багатокритеріальна модель оптимізаційних задач, які виникають, коли не всі учасники інженерного проекту, пов'язаного із розміщенням споріднених виробничих об'єктів (вузлів), одночасно готові визначитись із своїми намірами. Ця модель поповнює ряд багатокритеріальних моделей, розроблених і досліджених автором в роботах. В статті наведені встановлені автором умови існування і єдиності розв'язку описаної багатокритеріальної оптимізаційної задачі. Досліджений зв'язок між цією оптимізаційною задачею та спорідненою з нею стратегічною грою. Також запропонований і метод відшукування розв'язку поставленої багатокритеріальної оптимізаційної задачі, який ілюструється конкретним прикладом.

In this work the formalized multicriterion model of optimization tasks is presented, which arise up when not all of participants of engineering project, related with placing of cognate production objects (knots), are simultaneously ready to determine with their intentions. This model fills up the row of multicriterion models, developed and probed by the author. In the paper the author's offered conditions of existence and uniqueness of solution of the described multicriterion optimization task is resulted. The connection